

本選課題解説

スーパーコン2016審査委員会
東京工業大学・大阪大学

1. 背景（用語については下の用語解説を参照）

グラフの最短経路長は、非常に多くの分野で使われているが、この課題では、総最短経路長（すべての頂点間の最短経路の総和）が最小となるグラフを設計する問題を考える。与えられた頂点数 n と次数 d に対し、その頂点数と次数を持つ正則グラフのうちで総最短経路長が最小となるグラフを求めよ、というのが今回の課題である。

この課題自身もいろいろな応用が考えられるが、とくにスーパーコンピュータ（スパコン）のネットワーク配線でも重要な意味を持つ問題である。現代のスパコンの多くは、非常に多数の演算装置（計算ノードという）が並列に動くことで高速化を達成している。こうした計算ノード群は互いに高速にデータ交換をしなければならない。そのため、計算ノードは高速ネットワークでつながれている。けれども、各計算ノードから出すことのできる線（つまり次数）の数は限られている。すべての計算ノードは、他の計算ノードを中継して、目的の計算ノードにデータを送ることができるが、そうした転送距離が短い方が望ましい。その設計に、小さいグラフ（つまり、総最短経路長が小さいグラフ）が必要になってくるのである。

用語解説

- グラフ： 頂点と頂点同士を結ぶ辺からなる図形のこと。記号的には、グラフを G 、頂点の集合を V 、辺の集合を E で表わすことが多い。また、頂点の個数を n で表わす。以下では、 V の各頂点には番号が 0 から $n-1$ までふられているものとする。
- 出力グラフ： 本選問題に対するプログラムが答えとして出力するグラフのこと。一般にグラフには辺には向きがある場合もあるが、出力グラフは辺には向きがない無向グラフである。しかも、1組の頂点間には高々1本しか辺がない単純グラフである。

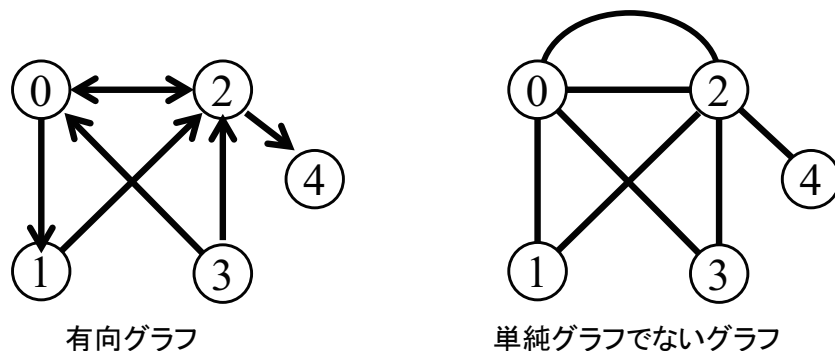


図 1 単純無向グラフでない例

グラフの頂点 v につながっている辺の数を、その頂点 v の次数と呼ぶ。すべての頂点の次数が同じグラフを正則グラフという。本選問題では対象とするのは正則グラフである。つまり、出力グラフは単純正則無向グラフであり、かつ各頂点の次数が指定された値になっているグラフである。

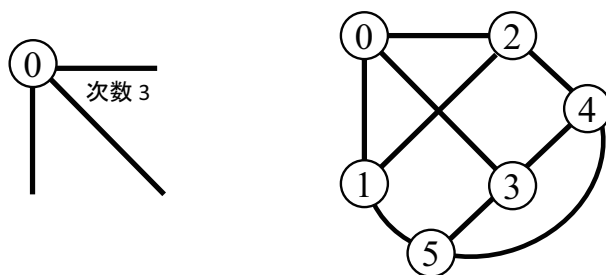


図 2 次数，単純無向正則グラフの例

- 辺の長さ： 出力グラフの頂点には C 色の色が塗られていると仮定する (C は入力データとして与えられる)。頂点番号 0 から $n_1 - 1$ の頂点には色 0 が、頂点番号 n_1 から $n_1 + n_2 - 1$ の頂点には色 1 が、... というように、色が塗られているものとする。各辺の長さは、その辺が結ぶ 2 頂点の色の組合せにより決まる。これを色間距離と呼ぶことにする。色間距離も入力として与えられる。

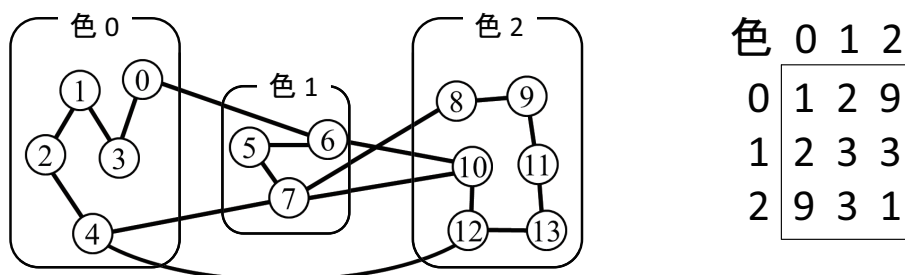


図 3 色間距離の例 (注：この例は正則グラフではない)

- 最短経路： グラフ上の 2 頂点をつなぐ辺の列を経路とか道という。2 頂点をつなぐ道の中で、その道上の辺の長さの和 (つまり経路長) が最も短いものを最短経路といい、その長さを最短経路長という。すべての頂点の組の間の最短経路長の和を総最短経路長 (ASPL = All Shortest Path Length) という。本選問題は、この ASPL が最小となる出力グラフを求めることである。

たとえば、図 3 のグラフでは、2 から 12 までは、2 4 12 という経路があるが、その距離は 10 である。一方、2 4 7 10 12 を使えば、距離は 7 となる。それより短い経路はないので、2 から 12 への最短経路長は 7 である (ちなみに、12 から 2 への最短経路長も 7 である。) このように、すべての頂点同士の最短経路長を求めて「行列」の形でまとめると、右のようになる。この要素の総和 $\div 2$ が、このグラフの ASPL である。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	2	3	1	4	5	2	6	9	9	5	8	6	7
1	2	0	1	1	2	7	4	4	7	8	7	9	8	9
2	3	1	0	2	1	6	5	3	6	7	6	8	7	8
3	1	1	2	0	3	6	3	5	8	9	6	9	7	8
4	4	2	1	3	0	5	6	2	5	6	5	7	6	7
5	5	7	6	6	5	0	3	3	6	7	6	8	7	8
6	2	4	5	3	6	3	0	6	8	7	3	6	4	5
7	6	4	3	5	2	3	6	0	3	4	3	5	4	5
8	9	7	6	8	5	6	8	3	0	1	5	2	4	3
9	9	8	7	9	6	7	7	4	1	0	4	1	3	2
10	5	7	6	6	5	6	3	3	5	4	0	3	1	2
11	8	9	8	9	7	8	6	5	2	1	3	0	2	1
12	6	8	7	7	6	7	4	4	4	3	1	2	0	1
13	7	9	8	8	7	8	5	5	3	2	2	1	1	0

補足：Graph Golf について¹

今年の本選問題は、国立情報学研究所が昨年より始めた Graph Golf というコンテストにヒントを得て作ったものである。Graph Golf では頂点の色が 1 色しかなく、すべてが同じ辺の長さの場合のみを考えている。一方で、頂点数の非常に大きなグラフが対象であり、勝つためには理論限界に近い ASPL が要求される。本選問題では、そこまで良い (= 小さい) ASPL を出せるかどうかはわからない。

なお、コンテスト期間中は外部のウェブページを見ないお約束になっているが (宿舎や家に帰った後でも)、Graph Golf のページ (<http://research.nii.ac.jp/graphgolf/>) だけは閲覧してよいことにする。

2. 問題

小さなグラフ構成問題

入力として与えられる以下のグラフの条件パラメータに対し、総最短経路長 (ASPL) が最小となる単純正則無向グラフを求めよ。

グラフ条件

頂点数： n 次数： d 色数： C

各色で塗られる頂点数： n_0, \dots, n_{C-1}

色間の距離： $(w_{i,j})$ (ただし, $0 \leq i, j \leq C-1$)

注意：同じ ASPL を持つグラフは複数存在するが、そのうちの 1 つを答えればよい。

入出力データの仕様

入力

入力は以下の形式で与えられる (横に書いてある日本語の文は説明)。

n	頂点数 (範囲： $512 \leq n \leq 2048$; ただし, 偶数 (正則グラフが存在する条件))
d	次数 (範囲： $4 \leq d \leq 16$)
C	色の数 (範囲： $C = 2$ または $C = 3$)
$n_0 n_1 \dots n_{C-1}$	各色の頂点数 (範囲： $1 \leq n_i \leq n$; 合計で n)
$w_{0,0} w_{0,1} \dots w_{0,C-1}$	これ以降は色間距離
$w_{1,0} w_{1,1} \dots w_{1,C-1}$	$w_{i,j}$ は色 i の頂点と色 j の頂点を結ぶ辺の長さ
\vdots	(範囲： $1 \leq w_{i,j} \leq 9$ の整数; なお, $w_{i,j} = w_{j,i}$ である)
$w_{C-1,0} w_{C-1,1} \dots w_{C-1,C-1}$	

¹正確には、Graph Golf で議論されているのは Average Shortest Path Length である。コンテストでは整数の方が扱いやすいので「平均」ではなく「総和」にした。

出力

出力グラフは以下の形式で出すことにする．

```
u0 v0
u1 v1
⋮
um-1 vm-1
```

出力は出力グラフの辺の情報で， $m = n \cdot d / 2$ 行からなる． i 行目は，頂点 u_i と頂点 v_i の間に辺が張られていることを表す．

3．競技方法・審査方法

今回は，実時間型対戦を行う．各チームには 1 ノード (12 CPU + 1 GPU) が割り当てられ，それを使って制限時間内に 9 個 (予定) の問題例に挑戦してもらう．時間内に，最も多くの得点を得たチームが優勝である．以降の順位もその得点に応じてきまる (提出方法については，別途，説明する．なお，制限時間と問題例の数は (もしも変更がある場合でも) コンテスト 3 日目 (水曜日) の朝までに確定させ発表する．)

各問題例ごとに，そのグラフ条件の下で作った出力グラフの ASPL に応じて，小さい出力グラフを出したチーム順に 1 位，以下，2 位，3 位，... とし，その順位に応じて，チームの獲得する得点が決まる．なお，出力グラフは時間内であれば何度提出してもよい．また，同じ ASPL を持つ出力グラフを提出した場合には，提出時刻の早いものを上位とする．さらに，提出時刻が同じ場合には同順位とする．得点は，各問題例ごとに，1 位，2 位，...，10 位の順で，25, 18, 15, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 1 点とする (F 1 方式)．同順位の場合には，続く順位の平均値を得点とする．たとえば，3 チームが 2 位の場合，その 3 チームが獲得する点は $(18 + 15 + 12) / 3 = 15$ である．また，その次のチームが獲得する点は 10 点である．各チームが獲得した総得点数により，総合順位を決める．

(補足) CPU は複数使えるので，複数のジョブを実行させても並列に動くことが (ある程度までは) 期待できる．しかしながら，GPU は 1 台に制限されているので，複数のジョブが実行できても完全に並列には動かない場合もある．