SuperCon2021 本選問題: 感染症流行のネットワーク解析

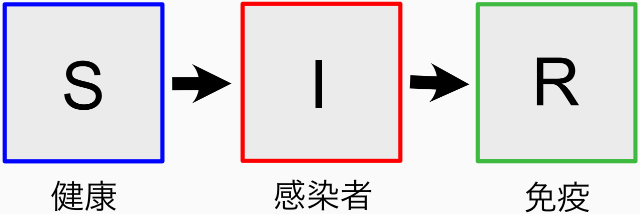
2021.8.27

はじめに: 感染症の SIR モデル

動機

- 感染症の流行を解析・予測するために数理モデルが重要な役割を果たしている。

最も基本的な SIR モデル (Kermack& McKendrick,1927)



人口を三種類に分ける (コンパートメントモデル)

感染者の増え方

一日で感染する人数の考え方

- その日の感染者数 I に比例するとしよう
- その街の健康な人の数 S に比例するとしよう

一日当たり (day=t) の新たな感染者数

- $\beta S(t) I(t)$
    - β は感染率

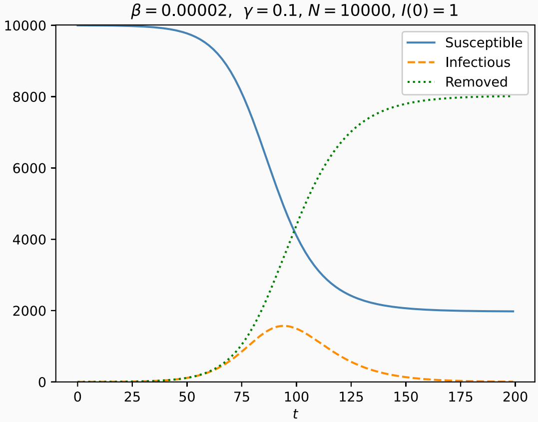
差分 SIR モデル

SIR equations (simple ver.)

$$
\begin{aligned}
S(t+1) &= S(t) - \beta S(t)I(t) \\
I(t+1) &= I(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\
R(t+1) &= R(t) + \gamma I(t)
\end{aligned}
$$

- 全人口 $N = S + I + R$ は一定
- γ は治癒率 (+死亡率)
- $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}N$：基本再生産数

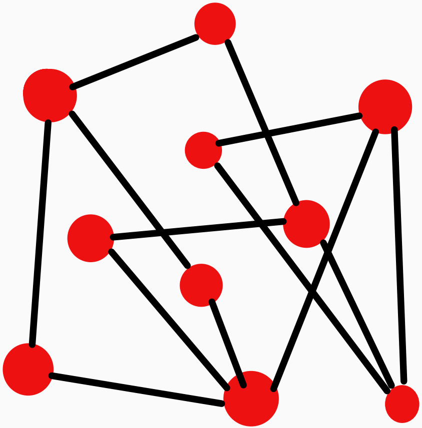
SIR モデルでの感染者数の推移



ネットワーク SIR モデル (概念)

動機

- 人々はいくつもの集団に分かれている
  - 集団内と集団間では感染症の広がりかたが違うだろう
  - つながった集団間では低い感染率 β' で感染が伝わる



10 集団 13 リンクの例 (円の大きさは集団の人数)

ネットワークSIRモデル

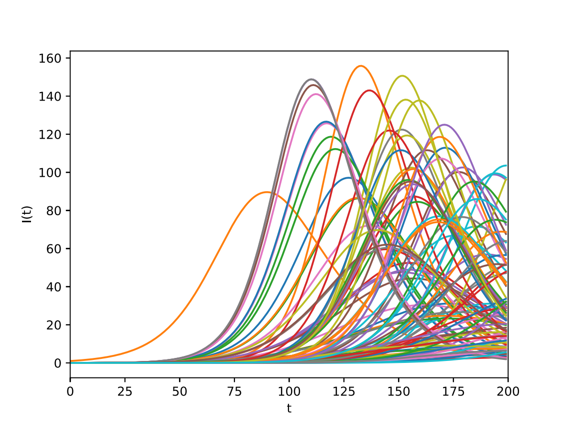
モデル

$$
\begin{aligned}
S_i(t+1) &= S_i(t) - \beta S_i(t) I_i(t) - \beta' S_i(t) \sum_{j=0}^{N_{\mathrm{group}}-1} C_{ij} I_j(t) \\
I_i(t+1) &= I_i(t) + \beta S_i(t) I_i(t) + \beta' S_i(t) \sum_{j=0}^{N_{\mathrm{group}}-1} C_{ij} I_j(t) - \gamma I_i(t) \\
R_i(t+1) &= R_i(t) + \gamma I_i(t)
\end{aligned}
$$

隣接行列 C_{ij}

1. 集団 i と j が直接つながっていれば $C_{ij} = 1$ かつ $C_{ij} = C_{ji}$
2. 集団 i と j が直接つながっていなければ $C_{ij} = 0$。

ネットワーク SIR モデルでの感染者数の推移



100 集団の例。$t = 0$ でひとつの集団にひとりの感染者

問題

作成するプログラム

- 各集団の人数が与えられるが、集団間のつながり (ネットワーク構造) は未知である。
- 第 0 日に 0 番目の集団で一人が感染者になった。その後、ネットワーク SIR モデルに従って感染が広がってゆく。
- 第 $T = 200$ 日の各集団での感染者数の組 $\{I_i^{\mathrm{prob}}(T)\}(i = 0 \sim N_{\mathrm{group}} - 1)$ が問題として与えられるので、それを再現する隣接行列 C_{ij} を推定するプログラムを作成する (**ネットワーク構造の推定**)

問題 (続き)

精度の定義

推定された C_{ij} を使って求められた第 T 日の各集団での感染者数の組を $\{I_i^{\mathrm{inf}}(T)\}(i = 0 \sim N_{\mathrm{group}} - 1)$ とすると、誤差二乗和は

$$E = \sum_{i=0}^{N_{\mathrm{group}}-1} (I_i^{\mathrm{inf}}(T) - I_i^{\mathrm{prob}}(T))^2$$

で求められる。これをできるだけ小さくする。

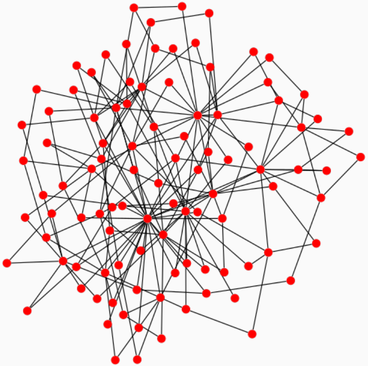
問題 (続き)

パラメーター

- 集団の数は $N_{\text{group}} = 100$、日数は $T = 200$ 日に固定される。
    - 人数は $500 \sim 1000$ の一様分布。
- 感染率と回復率は $\beta = 0.0002$、$\beta' = 0.000001$、$\gamma = 0.1$ に固定される。
- 集団間のつながりの総数は問題ごとに異なるが、問題で与えられる (だいたい 190 程度)。

ネットワークの例

- 問題では Barabasi-Albert のスケールフリーネットワークを使用
  - 少数の集団はたくさんのリンクを持ち (ハブ性)、多くの集団は少数のリンクしか持たない。



勝利条件

1. 提出されたプログラムで問題を 3 問解く。実行時間の上限は各問 5 分とする。
2. 各問について、誤差二乗和が小さいものから順に順位をつけ、1 位 20 点、2 位 19 点、以下同様に点数化する。誤差二乗和が全く同じときには出力までの時間が短いチームを上位とする。
3. 3 問の点数を合計して総合順位をつける。点数が等しい時には、3 問の計算時間の合計が短いチームを上位とする。

考えられる手法

離散変数の最適化問題なので、以下のような可能性が想定される

1. 貪欲モンテカルロ法
2. 模擬焼きなまし (Simulated Annealing)
3. 有限温度のメトロポリス法またはギブス・サンプラー
4. 交換モンテカルロ法
5. 遺伝的アルゴリズム
6. 連続化して勾配法
7. マルチカノニカル法 (Wang-Landau 法)